

04

Teorías espectrales del campo electromagnético

Espacios de representación

Una función f de campo representa una aplicación entre los puntos de un espacio y el cuerpo de los números reales, y tiene un significado de cómo opera algebraicamente o funcionalmente que es independiente de la elección de dicho sistema de coordenadas. La operación de una función es independiente de un sistema de coordenadas la representaremos como $|f\rangle$.

Un sistema de coordenadas es un concepto geométrico en que a cada punto $|X\rangle$ de un espacio se le asigna unas coordenadas representadas por $\langle X|$. Este espacio puede ser el espacio físico de coordenadas o cualquier otro espacio general.

Se denomina representación de una función $|f\rangle$ en el espacio definido por sistema de coordenadas $|X\rangle$ a

$$\langle X|f\rangle = f(X)$$

La definición de representación debe preservar la estructura de espacio vectorial de las funciones de cuadrado integrable. Para el producto interno de dos funciones deberá ser $\langle f|g\rangle$ por definición se tiene

$$\langle f|g\rangle = \int_{X^\infty} f^*(X)g(X) dX = \int_{X^\infty} \langle X|f\rangle^* \langle X|g\rangle dX = \int_{X^\infty} \langle f|X\rangle \langle X|g\rangle dX$$

y por tanto se debe verificar la relación de complitud

$$|X\rangle \langle X| = I$$

y para que $f(X)$ sea real deberá verificarse

$$\langle X|f \rangle^* = \langle f|X \rangle$$

Además como

$$f(X) = \langle X|f \rangle = \int_{X^\infty} \delta(X - X') f(X') dX' = \int_{X^\infty} \langle X|X' \rangle \langle X'|f \rangle dX'$$

será

$$\langle X'|X \rangle = \delta(X - X')$$

que presenta evidentemente las coordenadas $\langle X|$ de un punto del espacio $|X\rangle$ en la representación $|X\rangle$

Como el conjunto de funciones de cuadrado integrable $|f\rangle$ forma un espacio vectorial con un producto interno y una norma positiva definida, vemos también, que los $\langle X|$ forman una base completa y cerrada sobre la que se representa las funciones.

El espacio físico de coordenadas $|X\rangle$ puede ser continuo o tener una estructura discreta de infinitos puntos, y en este caso

$$\langle X^n|X^n \rangle = \delta_{nn}$$

Para concretar, la función coseno $|\cos\rangle$ en el espacio unidimensional de la recta real $|x\rangle$ se representa por

$$\langle x|\cos\rangle = \cos(x)$$

Una de base de funciones $|\varphi_k\rangle$ o $|\varphi_n\rangle$ normalizadas a la unidad que será completo y cerrado, si verifican

$$\int_{k^\infty} |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| dk = I \quad \text{o} \quad |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = I$$

donde k puede representar un parámetro continuo o n discreto,

Un cambio de la base $|X\rangle$ a las $|\varphi_k\rangle$ o $|\varphi_n\rangle$ dará lugar a un cambio de representación

$$f(k) = \langle \varphi_k|f \rangle = \int_{X^\infty} \langle \varphi_k|X \rangle \langle X|f \rangle dX = \int_{X^\infty} \langle X|\varphi_k \rangle^* \langle X|f \rangle dX = \int_{X^\infty} \varphi_k^*(X) f(X) dX$$

O a la inversa

$$f(X) = \langle X|f \rangle = \int_{k^\infty} \langle X|\varphi_k \rangle \langle \varphi_k|f \rangle dk = \int_{k^\infty} \varphi_k(X) f(k) dk$$

Espacio de Fourier

La representación de una función f en el espacio de coordenadas $(\vec{x}, t)$ no es la única posible. Cuando en un sistema físico actúan operadores diferenciales lineales, es más conveniente trabajar en el espacio de la transformada de Fourier $(\vec{k}, \omega)$ o $(\vec{x}, \omega)$ en el que se simplifica los cálculos matemáticos, y muchas veces nos da más información sobre los procesos que ocurre, pues el sistema se descompone en elementos básicos.

En la transformada de Fourier se toma como base $|\varphi_k\rangle$ a las ondas planas

$$\varphi_k(x) = \langle k | \varphi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

que verifican la relación de Complejidad y cierre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | x' \rangle dk = \langle x' | x \rangle = \delta(x - x')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x | \varphi_k \rangle \langle \varphi_{k'} | x \rangle dx = \delta(k - k')$$

es decir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x')$$

La transformada Fourier viene definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk$$

que en realidad representa un cambio de la base de representación a $|\varphi_k\rangle$ a $|x\rangle$.

Para que la función se real deberá ser

$$f(-k) = f^*(k)$$

La anterior ecuación se puede invertir si se hace uso de las propiedades de la delta de Dirac

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k') f(k') dk' = f(k)$$

que en realidad como hemos visto, expresan son las relaciones de cierre y complitud de las funciones base ,con lo que tiene

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

que representa un cambio de la base de representación $|x\rangle$ a $|\varphi_k\rangle$.

Lo mismo en varias dimensiones se obtiene

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R_{\infty}^4} f(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 k d\omega$$

que se puede interpretar como un desarrollo en ondas planas $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ con amplitudes $f(\vec{k}, \omega)$ que verifican para que la función se real

$$f(-\vec{k}, -\omega) = f^*(\vec{k}, \omega)$$

La transformación inversa será

$$f(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_{\infty}^4} f(\vec{x}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d^3 x dt$$

También utilizaremos la transformada Fourier solo en el tiempo

$$f(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\vec{x}, -\omega) = f^*(\vec{x}, \omega)$$

Existe un importante teorema llamado de la convolución que nos dice que si h una función es la convolución de dos funciones entonces su transformada Fourier es el producto de las transformadas

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt' \quad \Rightarrow \quad h(\omega) = \sqrt{2\pi} f(\omega) g(\omega)$$

El teorema inverso también se aplica de la misma forma

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') g(\omega - \omega') d\omega' \quad \Rightarrow \quad h(t) = \sqrt{2\pi} f(t) g(t)$$

En el caso de que haya varias dimensiones

$$h(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}') g(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \Rightarrow h(\vec{k}) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} f(\vec{k}) g(\vec{k})$$

Vemos que el coeficiente es $(\sqrt{2\pi})^n$ donde n es el número de dimensiones implicadas en la transformada Fourier.

Esto se puede demostrar directamente haciendo las transformadas Fourier y aplicando la definición de la delta de Dirac.

Una aplicación de la convolución es al teorema de Helmholtz y Poisson. Sabemos que un campo vectorial se puede descomponer en la forma

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_L + \vec{V}_T = -\vec{\nabla} \int_{V_{\infty}} \frac{\nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \vec{\nabla} \wedge \int_{V_{\infty}} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Aplicando el teorema de la convolución se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{k}) = \vec{V}_L(\vec{k}) + \vec{V}_T(\vec{k}) &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{2\pi} k^2} (\vec{k} \cdot \vec{V}(\vec{k}, \omega) \vec{k} - \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{V}(\vec{k}, \omega)) \\ &= \frac{1}{k^2} \vec{k} \cdot \vec{J}_L(\vec{k}, \omega) \vec{k} - \frac{1}{k^2} \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{J}_T(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

Esto mismo se puede ver también a partir de la igualdad

$$\nabla^2 \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_L) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_T$$

de la que se obtiene

$$\vec{k}^2 \vec{V}(\vec{k}, \omega) = \vec{k} \cdot \vec{V}_L(\vec{k}, \omega) \vec{k} - \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{V}_T(\vec{k}, \omega) = \vec{k}^2 \vec{V}_L(\vec{k}, \omega) + \vec{k}^2 \vec{V}_T(\vec{k}, \omega)$$

De todo esto se desprende que se puede definir dos operadores $\mathcal{G}_T$ y $\mathcal{G}_L$ que proyectan un campo vectorial sobre sus componentes longitudinales y transversales

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_L &= \frac{\vec{k}}{k^2} \vec{k} \cdot \\ \mathcal{G}_T &= -\frac{1}{k^2} \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge = \frac{1}{k^2} (\vec{k}^2 - \vec{k} \vec{k} \cdot) \end{aligned}$$

Otro teorema de interés es el de Parseval, en que se verifica para dos funciones reales f y g la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g(-\omega) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g^*(\omega) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega)g(\omega) dk$$

Evidentemente este teorema representa la invarianza del producto interno de dos funciones en las distintas representaciones.

En varias dimensiones se puede expresar como

$$\int_{V_{\infty}^3} \vec{f}(\vec{x}) \otimes \vec{g}(\vec{x}) d^3x = \int_{R_{\infty}^3} \vec{f}(\vec{k}) \otimes \vec{g}(-\vec{k}) d^3k = \int_{R_{\infty}^3} \vec{f}(\vec{k}) \otimes \vec{g}^*(\vec{k}) d^3k$$

donde $\otimes$ es una operación bilineal como el producto escalar o vectorial.

Operaciones entre componentes espectrales y promedios

Consideremos una componente espectral de dos campos vectoriales $\vec{F}(\omega)$ y $\vec{G}(\omega)$ que se pueden escribir en sus componentes reales

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\omega}(t) &= \vec{F}(\omega)e^{i\omega t} + \vec{F}^*(-\omega)e^{-i\omega t} = \vec{F}(\omega)e^{i\omega t} + \vec{F}^*(\omega)e^{-i\omega t} \\ \vec{G}_{\omega}(t) &= \vec{G}(\omega)e^{i\omega t} + \vec{G}^*(-\omega)e^{-i\omega t} = \vec{G}(\omega)e^{i\omega t} + \vec{G}^*(\omega)e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Una operación bilineal $\otimes$ que represente una magnitud real, como el producto escalar o vectorial entre estos campos, vendrá representada como

$$\vec{F}_{\omega} \otimes \vec{G}_{\omega}(t) = \vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega) + \vec{F}^*(\omega) \otimes \vec{G}(\omega) + \vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}(\omega)e^{-i\omega t} + \vec{F}^*(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega)e^{-2i\omega t}$$

Si definimos el promedio en el tiempo de una función $f(t)$ como

$$\langle f \rangle = \langle f(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(t + \tau) d\tau$$

entonces se verifica

$$\langle \vec{F}_{\omega} \otimes \vec{G}_{\omega} \rangle = \vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega) + \vec{F}^*(\omega) \otimes \vec{G}(\omega) = 2\text{Re}(\vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega))$$

A veces se expresan los campos simplemente con una componente del espectro de frecuencias

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) &= \vec{F}(\omega)e^{i\omega t} \\ \vec{G}(t) &= \vec{G}(\omega)e^{i\omega t}\end{aligned}$$

entonces se verifica que

$$Re \otimes Re \vec{G}(t) = \frac{1}{2} Re \left(\vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}(\omega) \right) + \frac{1}{2} Re \left(\vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega) \right)$$

y su promedio en el tiempo viene dado por

$$\langle \vec{F} \otimes \vec{G} \rangle = \frac{1}{2} Re \left(\vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega) \right) = \frac{1}{4} \left(\vec{F}(\omega) \otimes \vec{G}^*(\omega) + \vec{F}^*(\omega) \otimes \vec{G}(\omega) \right)$$

Otras veces dos campos $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son funciones complejas pero la operación $\otimes$ solo tiene sentido sobre valores reales

$$Re \vec{F} \otimes Re \vec{G} = \frac{1}{4} (\vec{F} + \vec{F}^*) (\vec{G} + \vec{G}^*) = \frac{1}{2} Re (\vec{F} \otimes \vec{G}) + \frac{1}{2} Re (\vec{F} \otimes \vec{G}^*)$$

y por tanto el promedio temporal será

$$\langle Re \vec{F} \otimes Re \vec{G} \rangle = \frac{1}{2} Re (\vec{F} \otimes \vec{G})$$

Funciones de Green

Se define como la función de Green $G_0(\vec{x} - \vec{x}')$ a la solución regular que se anule en el infinito de de la ecuación

$$\nabla^2 G_0(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Si $G_0(\vec{k})$ es la transformada Fourier de $G_0(\vec{x})$ se verificará entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R_\infty^3} G_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k &= - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R_\infty^3} \vec{k}^2 G_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_\infty^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$G_0(\vec{k}) = - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{\vec{k}^2}$$

habiéndose hecho uso de la definición de la delta de Dirac

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_\infty^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k$$

Si hacemos la transformada inversa

$$\begin{aligned}
 G_0(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3_\infty} G_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k = \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\infty G_0(k) 2\pi k^2 dk \int_0^\pi e^{i|\vec{k}| |\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta} \sin\theta d\theta = \\
 &= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty \frac{\sin(|\vec{k}| |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{k}|} dk = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto, $G_0(\vec{x} - \vec{x}')$ es una solución particular que se anula en el infinito de la ecuación

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Esto nos permite resolver la ecuación de Poisson como la del potencial electrostático,

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = g(\vec{x})$$

mediante la función de Green

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} G_0(\vec{x} - \vec{x}') g(\vec{x}') d^3x' = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{g(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Observemos que si se suma una función que verifique la ecuación de la laplaciana el resultado es una función que también cumple con la ecuación de Poisson, lo que puede ser necesario para resolver determinados problemas de contorno.

Consideremos ahora la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$$

Si tomamos la transformada Fourier en el tiempo tendremos

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) f(\vec{x}, \omega) = g(\vec{x}, \omega)$$

que se conoce como la ecuación de Helmholtz. También es posible resolverla mediante la función de Green de la ecuación

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) G_1(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Es fácil verificar que dos soluciones que se anulan en el infinito vienen dadas por

$$G_{1a}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = -\frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Estas dos soluciones se denominan avanzada y retardada.

Por tanto, la solución de la ecuación de Helmholtz será

$$f(\vec{x}, \omega) = \int_{V_\infty} G_{1a}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) g(\vec{x}', \omega) d^3x' = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} g(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

Si en la ecuación de ondas también tomamos la transformada Fourier de la parte espacial, vemos que se verifica

$$\left(-\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) f(\vec{k}, \omega) = g(\vec{k}, \omega)$$

Si no hay fuentes $g \equiv 0$, como en el caso de una onda electromagnética en el vacío será entonces

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Si hacemos ahora la transformada inversa de la solución de la ecuación de Helmholtz, tenemos

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_\infty} \frac{d^3x'}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'| - i\omega t\right)} g(\vec{x}', \omega) d\omega \end{aligned}$$

Observemos que t_r

$$t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} = t_r(t, |\vec{x} - \vec{x}'|)$$

es el tiempo retardado, definido como aquel en que una onda que parta de $\vec{x}'$ llega a $\vec{x}$ en el tiempo. Entonces por el principio de causalidad, de las dos soluciones solo la de con signo positivo es físicamente aceptable, y tendremos

$$f(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)} g(\vec{x}', \omega) d\omega = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{g(\vec{x}', t_r)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Esta es la solución retardada de la ecuación de ondas que también se representa como

$$f(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[g(\vec{x}', t')]_r}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Donde el corchete $[g(\vec{x}', t')]_r$ significa que hay que tomar el tiempo retardado $t_r = t - r/c$.

La función de Green retardada se define como

$$G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = -\frac{e^{+i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Haciendo la transformación inversa

$$\begin{aligned} G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(t' - t + r/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \theta(t - t') \end{aligned}$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón $\theta(x) = 1$ si $x > 0$ y $\theta(x) = 0$ si $x < 0$.

De igual forma, la función de Green adelantada se define como

$$G_{1a}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

cuya transformada inversa será

$$\begin{aligned} G_{1a}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t' + \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(t' - t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \theta(t' - t) \end{aligned}$$

Las funciones de Green son soluciones regulares de la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_{1a,b}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

Como hemos definido

$$f(\vec{x}, \omega) = \int_{V_\infty} G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega) g(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

por el teorema de la convolución, la solución retardada de la ecuación de ondas también se puede escribir como

$$\begin{aligned} f_r(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R^4_\infty} G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') g(\vec{x}', t') d^3x' dt' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} d^3x' \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}', t') \frac{\delta(t' - t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dt' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{g(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido antes.

Observemos que si se suma una función que verifique la ecuación de ondas homogénea, el resultado es una función que también cumple con la ecuación de ondas no homogénea.

Es ilustrativo obtener las funciones de Green G_1 a partir de la transformada total de la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G_1(\vec{x} - \vec{x}', \omega) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

con lo que se tiene

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \left(-\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G_1(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

y por tanto

$$G_1(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2\right)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(k_0^2 - \vec{k}^2)}$$

Donde hemos llamado $k_0 = \omega/c$.

Haciendo la transformada inversa tendremos

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int_{R^3_\infty} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{(k_0^2 - \vec{k}^2)} e^{-i(k_0 c(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))} dk_0$$

Puesto que hay dos polos en $k_0 = +|\vec{k}|$ y $k_0 = -|\vec{k}|$, la función retardada de Green se obtiene haciendo $k_0^2 - \vec{k}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (k_0^2 - \vec{k}^2 + i2\varepsilon)$, con lo que los polos se sitúan en

$k_0 = +|\vec{k}| - i2\varepsilon$ y $k_0 = -|\vec{k}| - i2\varepsilon$. Para $t > t'$ efectuando la integral en el semiplano inferior complejo de k_0 , obteniéndose

$$\begin{aligned} G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} 2\pi\theta(t - t') \int_{R^3} \frac{c}{|\vec{k}|} \text{sen}\left(\frac{|\vec{k}|c(t - t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3k \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} 4\pi \frac{c\theta(t - t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_0^\infty \text{sen}\left(\frac{|\vec{k}|c(t - t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) \text{sen}(|\vec{k}||\vec{x} - \vec{x}'|) dk \end{aligned}$$

donde θ es la función escalón $\theta(t - t') = 1$ si $t > t'$ y $\theta(t - t') = 0$ si $t < t'$

Empleando la igualdad

$$\int_0^\infty \text{sen}(ak)\text{sen}(bk) dk = -\frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{i(a+b)k} - e^{i(a-b)k}) dk = -\frac{\pi}{2} (\delta(a+b) - \delta(a-b))$$

se vuelve a obtener

$$G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\theta(t - t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)$$

Teorema Poisson dependiente del tiempo

Si $\vec{V}(\vec{x}, \omega)$ es un campo vectorial la ecuación de Helmholtz, se verifica entonces la identidad

$$\vec{V}(\vec{x}, \omega) = -\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \int_{V_\infty} \vec{V}(\vec{x}', \omega) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

ya que

$$-\int_{V_\infty} \vec{V}(\vec{x}', \omega) \left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \int_{V_\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \vec{V}(\vec{x}', \omega) d^3x' = \vec{V}(\vec{x})$$

Esta ecuación también se puede escribir como

Si se integra por partes y se tiene en cuenta que $\partial_i |\vec{x} - \vec{x}'| = -\partial'_i |\vec{x} - \vec{x}'|$ se obtiene

$$\vec{V}(\vec{x}, \omega) = -\int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \left(\nabla'^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{V}(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

Empleando la igualdad vectorial

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, \omega) &= - \int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \left(\nabla'^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right) \vec{V}(\vec{x}', \omega) d^3x' = \\ &= - \int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' \cdot \vec{V}(\vec{x}', \omega) - \vec{\nabla}' \wedge \vec{\nabla}' \wedge \vec{V}(\vec{x}', \omega) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{V}(\vec{x}', \omega) \right) d^3x' \end{aligned}$$

Si hacemos la transformada inversa para obtener la dependencia en el tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, t) &= - \int_{V_\infty} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \left[\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \vec{V}(\vec{x}', t') \right] d^3x' = \\ &= - \int_{V_\infty} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' \cdot \vec{V}(\vec{x}', t') - \vec{\nabla}' \wedge \vec{\nabla}' \wedge \vec{V}(\vec{x}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{V}(\vec{x}', t') \right] d^3x' \end{aligned}$$

donde las magnitudes dentro de un corchete [...], significa que tienen que ser evaluadas en tiempo el tiempo retardado $t = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$

157

Estas son las expresiones que generalizan el teorema Poisson para campos vectoriales dependientes del tiempo obtenidas por Jefimenko.

Teorema Helmholtz dependiente del tiempo

Ahora utilizaremos las siguientes identidades retardadas para cualquier función que dependa de $X(\vec{x}, t)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}[t] &= - \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{c|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \vec{\nabla}[X(\vec{x}, t)] &= \partial_{t_r} X(\vec{x}, t) \vec{\nabla} t_r = -\partial_t [X(\vec{x}, t)] \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{c|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \vec{\nabla}[X(\vec{x}, t)] &= \partial_i X(\vec{x}, t) + \partial_{t_r} X(\vec{x}, t_r) \vec{\nabla} t_r = [\vec{\nabla} X(\vec{x}, t_r)] + \partial_t [X(\vec{x}, t)] \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{c|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \frac{[\vec{\nabla} X(\vec{x}, t)]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \vec{\nabla} \frac{[X(\vec{x}, t)]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla} \frac{[X(\vec{x}, t)]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ [\vec{\nabla} X(\vec{x}, t)] &= \vec{\nabla} X(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} X(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, en adelante, cuando aparezca una prima como en $\vec{\nabla}'$ significa que el operador actúa la variable $\vec{x}'$.

Asimismo la notación $\vec{\nabla}'$ indica que $\vec{V}$ se evalúa en $\vec{V}'$. Una magnitud entre corchetes $[\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}']$ significa que primero se hace la operación y después se evalúa en el tiempo retardado $t' = t - r(t')/c$.

Se define la siguiente notación para la posición relativa

$$\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} - \vec{x}'$$

$$r \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}| \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{x} - \vec{x}'|$$

y los vectores unitarios

$$\vec{r}_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{r}'_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}'}{r'}$$

siendo $\vec{x}$ un punto de observación en se miden los campos y $\vec{x}'$ está situado en punto de las fuentes.

Por tanto $\vec{r}_u$ es un vector unitario dirigido desde el punto de integración $\vec{x}'$ al punto de observación $\vec{x}$, y $\vec{r}'_u$ va desde el punto de observación $\vec{x}$ al punto de integración $\vec{x}'$.

Utilizando la tercera identidad retardada, la anterior integral para $\vec{V}(\vec{x}, t)$ se puede transformar en

$$4\pi\vec{V}(\vec{x}, t) = \int_{V_\infty} \left(\vec{\nabla} \frac{[\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}']}{r} + \vec{\nabla}' \frac{[\vec{\nabla} \cdot \vec{V}']}{r} - \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{V}' \right] \right) d^3x'$$

$$+ \int_{V_\infty} \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}']}{r} + \vec{\nabla}' \wedge \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{V}']}{r} \right) d^3x'$$

Puesto que el segundo y quinto término se transforman en integrales de superficie que se anulan en el infinito resulta

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(-\vec{\nabla} \frac{[\vec{\nabla}' \cdot \vec{V}']}{r} + \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}']}{r} + \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \vec{V}' \right] \right) d^3x'$$

Esta ecuación expresa el teorema de Helmholtz cuando los campos varían con el tiempo.

Si estas ecuaciones se aplican al campo eléctrico y magnético, se obtiene

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right]_r}{r} d^3x'$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{j}]_r}{r} d^3x'$$

lo que era de esperar ya que el campo electromagnético obedece en el vacío a las ecuaciones de ondas inhomogéneas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j}$$

Si se aplica la segunda identidad a la anterior expresión esta se puede reescribir también como

$$4\pi\vec{V}(\vec{x}, t) = \int_{V_\infty} \left([\vec{\nabla} \cdot \vec{V}] \frac{\vec{r}_u}{r^2} + \frac{\partial [\vec{\nabla} \cdot \vec{V}]}{\partial t} \frac{\vec{r}_u}{cr} - \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{V} \right] \right) d^3x'$$

$$+ \int_{V_\infty} \left([\vec{\nabla} \wedge \vec{V}] \wedge \frac{\vec{r}_u}{r^2} + \frac{\partial [\vec{\nabla} \wedge \vec{V}]}{\partial t} \wedge \frac{\vec{r}_u}{cr} \right) d^3x'$$

159

Vemos por tanto, que un campo vectorial que depende del tiempo queda definido por la divergencia, el rotacional y de la derivada en el tiempo, evaluados en el instante retardado.

Si esta última identidad se aplica al campo electromagnético obtenemos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho] \vec{r}_u}{r^2} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{V_\infty} \frac{\vec{r}_u \partial_t [\rho]}{r} d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t [\vec{j}]}{r} d^3x'$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{j}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{j}] \wedge \vec{r}_u}{r} d^3x'$$

Estas ecuaciones son conocidas como las relaciones de Jefimenko, que serán analizadas más en detalle en el capítulo de teorías de la causalidad.

Componentes T,L del espectro de frecuencias del campo E.M. Campos retardados y efecto electrocinético

Aunque para analizar las componentes longitudinales y transversales del campo electromagnético podríamos partir de los teoremas de Helmholtz y Poisson, sin embargo, es más ilustrativo emplear el espectro de frecuencias.

Ya hemos visto el campo electromagnético obedece en el vacío en presencia de cargas y corrientes obedece a las ecuaciones de ondas inhomogéneas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j}$$

Si se hace la transformada de Fourier se obtiene

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho(\vec{x}, \omega) - \frac{i\omega}{c^2} \vec{j}(\vec{k}, \omega)\right)$$

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{B}(\vec{x}, \omega) = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j}$$

Si $\vec{E}$ se descompone en sus componentes longitudinales y transversales, se debe verificar entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T(\vec{x}, t) = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_L(\vec{x}, t)$$

y para el campo de inducción magnética al ser solenoidal

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_L(\vec{k}, \omega) \equiv 0$$

El caso de una onda que se propaga en el vacío donde no existen fuentes es evidente que deberá ser

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Separando las componentes transversales y longitudinales, tenemos entonces

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}_T(\vec{x}, \omega) = -\frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}_T(\vec{x}, \omega)$$

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}_L(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho(\vec{x}, \omega) - \frac{i\omega}{c^2} \vec{j}_L(\vec{x}, \omega)\right)$$

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{B}_T(\vec{x}, \omega) = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{j}_T(\vec{x}, \omega)$$

Resolviendo la ecuación para $\vec{B}_T(\vec{x}, \omega)$ por medio de la función de Green $G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(\vec{k}, \omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \vec{J}_T(\vec{x}', \omega) d^3x' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{J}_T(\vec{x}', \omega) \wedge \vec{\nabla} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}_T(\vec{x}', \omega) \wedge \vec{r}_u}{r^2} e^{i\frac{\omega}{c}r} d^3x' - i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{c} \int_{V_\infty} \frac{\vec{J}_T(\vec{x}', \omega) \wedge \vec{r}_u}{r} e^{i\frac{\omega}{c}r} d^3x'\end{aligned}$$

Obsérvese que la primera integral es el rotacional de la componente transversal del potencial vector como era de esperar

$$\vec{A}_T(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \vec{J}_T(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

La componente longitudinal del potencial vector vendrá determinada por el gauge escogido, y como ya hemos visto, puede eliminarse de las ecuaciones del campo electromagnético.

Si hacemos la transformada Fourier inversa a $\vec{B}_T(\vec{k}, \omega)$ obtendremos la dependencia con el tiempo del campo de inducción magnético

$$\vec{B}_T(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{J}_T] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_T] \wedge \vec{r}_u}{r} d^3x'$$

donde t_r es el tiempo retardado $t_r = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

De igual forma para el potencial vector se obtiene

$$\vec{A}_T(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{J}_T]}{r} d^3x'$$

Vemos, que el primer término del campo de inducción magnética $\vec{B}_T(\vec{x}, t)$ es debido al efecto retardado de las corrientes de la ley de Ampère y que disminuye como $1/r^2$. El segundo es debido a la variación de la corriente en el tiempo, y disminuye más lentamente como $1/r$, siendo este el que contribuye al campo de radiación a grandes distancias de las fuentes.

El campo eléctrico se obtiene de forma similar a partir de por medio de la función de Green $G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}', \omega)$

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V_\infty} i\omega \vec{J}_T(\vec{x}', \omega) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} d^3x' \\ \vec{E}_L(\vec{x}, \omega) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}', \omega) \vec{\nabla} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V_\infty} i\omega \vec{J}_L(\vec{x}', \omega) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \left\{ \frac{\rho(\vec{x}', \omega) \vec{r}_u}{r^2} - \frac{i\omega}{c} \left(\frac{\rho(\vec{x}', \omega) \vec{r}_u}{r} - \frac{\vec{J}_L(\vec{x}', \omega)}{cr} \right) \right\} e^{i\frac{\omega}{c}r} d^3x'\end{aligned}$$

Si hacemos la transformada inversa, obtenemos para el campo eléctrico en función del tiempo

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(\vec{x}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_T]}{r} d^3x' \\ \vec{E}_L(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho] \vec{r}_u}{r^2} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \rho] \vec{r}_u}{r} d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_L]}{r} d^3x'\end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones para el campo electromagnético son las mismas que las de Jefimenko ya obtenidas antes.

El primer término de $\vec{E}_L$ es el efecto del potencial de Coulomb retardado, y disminuye como $1/r^2$.

Los otros dos términos disminuyen como $1/r$ y son lo que contribuyen al campo de radiación lejano.

El tercer término tiene un interés especial pues nos dice que se crea campo eléctrico transversal en dirección opuesta a la variación de la componente transversal de las corrientes, y que denominado por Jefimenko como campo electrocinético

$$\vec{E}_K(\vec{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_L]}{r} d^3x'$$

Vemos también, que el segundo término del campo magnético el rotacional de este campo manteniendo un tiempo retardado fijo.

Por consiguiente, el campo electromagnético solo depende de las fuentes y de sus derivadas en el tiempo retardadas.

Campo de radiación transversal

La ecuación de continuidad en la transformada Fourier de frecuencias, viene dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_L(\vec{x}, \omega) - i\omega\rho(\vec{x}, \omega) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T(\vec{x}, \omega) = 0$$

Si consideramos la ecuación de continuidad retardada, obtenemos la relación

$$[\partial_t \rho] = -[\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_L] = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{J}_L] + \frac{\vec{r}_u}{c} \cdot [\partial_t \vec{J}_L]$$

que introducida en la ecuación del campo eléctrico de Jefimenko obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_L(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho] \vec{r}_u}{r^2} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t([\vec{J}_L] \cdot \vec{r}_u \vec{r}_u - [\vec{J}_L])}{r} d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho] \vec{r}_u}{r^2} d^3x' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \cdot [\vec{J}_L] \vec{r}_u}{cr} d^3x' \end{aligned}$$

Si consideramos un pequeño volumen que encierra a $\vec{x}$ en el instante t , la variación de carga entre t y t_r será

$$(\rho(\vec{x}, t) - \rho(\vec{x}, t_r)) d^3x = -(t - t_r) [\vec{J}_L]_r \cdot \Delta \vec{S} = -\frac{r}{c} [\vec{J}_L]_r \cdot \Delta \vec{S}$$

163

o también

$$\frac{\rho(\vec{x}, t) \vec{r}_u}{r^2} = \frac{[\rho] \vec{r}_u}{r^2} - \frac{[\vec{J}_L] \vec{r}_u}{cr}$$

Ya que las integrales de superficie en el infinito se anulan, el campo eléctrico longitudinal será entonces igual al potencial de Coulomb instantáneo como ya sabíamos, y que decae como $1/r^2$ con la distancia

$$\vec{E}_L(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}, t) \vec{r}_u}{r^2} d^3x' = -\vec{\nabla} \phi_L$$

Por tanto el campo de radiación lejano, que decae como $1/r$, será

$$\begin{aligned} \vec{B}_{T,rad}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_T] \wedge \vec{r}_u}{r} d^3x' \\ \vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, t) &= -\partial_t [\vec{A}_T] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}_T]}{r} d^3x' \end{aligned}$$

Si transformamos estas ecuaciones al espectro de frecuencias, tendremos

$$\vec{B}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V_\infty} i\omega \frac{\vec{J}_T(\vec{x}', \omega)}{r} \wedge \vec{r}_u e^{i\frac{\omega}{c}r} d^3x'$$

$$\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} i\omega \frac{\vec{J}_T(\vec{x}', \omega)}{r} e^{i\frac{\omega}{c}r} d^3x'$$

Observemos que en cada punto del espacio $\vec{x}$ el integrando de $\vec{B}_{T,rad}$ es el mismo que el de $\vec{E}_{T,rad}$ pero multiplicado vectorialmente por $\vec{r}_u$; por ello $c\vec{B}_{T,rad}(\vec{x}, \omega)$ y $\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega)$ serán perpendiculares entre sí y tienen el mismo módulo

$$|c\vec{B}_{T,rad}(\vec{x}, \omega)| = |\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega)| \quad \text{y} \quad c\vec{B}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) \cdot \vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) \equiv 0$$

El flujo de energía propagante para cada componente del espectro se frecuencias viene dado por

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle_{cT}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) \wedge \vec{B}_{T,rad}^*(\vec{x}, \omega)) \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} \text{Re}(\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) \wedge c\vec{B}_{T,rad}^*(\vec{x}, \omega)) \end{aligned}$$

que tiene como módulo

$$\begin{aligned} |\langle \vec{S} \rangle_{cT}(\vec{x}, \omega)| &= \frac{c\epsilon_0}{2} |\vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega)|^2 = c\langle w \rangle_{rad}(\vec{x}, \omega) \\ \langle \vec{S} \rangle_{cT}(\vec{x}, \omega) &= c\langle w \rangle_{rad} \vec{n}_r \end{aligned}$$

Por tanto, en cada punto las componentes espectrales del flujo de energía $\vec{S}_{cT}(\vec{x}, \omega)$ se propaga como una onda transversal que transporta una densidad de energía $w_{rad}(\vec{x}, \omega)$ a la velocidad de la luz c . Sin embargo, la dirección $\vec{n}_r$ de $\vec{P}_{cT}(\vec{x}, \omega)$ en cada punto del espacio es distinta y depende de estructura del campo radiado.

La energía radiada integrada en el tiempo se puede calcular mediante el teorema de Parseval

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle_{cT}(\vec{x}) &= \frac{c\epsilon_0}{2} \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, t) \wedge c\vec{B}_{T,rad}^*(\vec{x}, t) dt \right) \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{T,rad}(\vec{x}, \omega) \wedge c\vec{B}_{T,rad}^*(\vec{x}, -\omega) d\omega \right) \\ &= \frac{\mu_0}{2(4\pi)^2 c} \text{Re} \int_{V_\infty} \int_{V_\infty} d^3x'' d^3x' \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \frac{\vec{J}_T^*(\vec{x}'', \omega) \wedge \vec{J}_T(\vec{x}', \omega)}{|\vec{x} - \vec{x}''| |\vec{x} - \vec{x}'|} \wedge \frac{(\vec{x} - \vec{x}'')}{|\vec{x} - \vec{x}''|} e^{i\frac{\omega}{c}(|\vec{x} - \vec{x}'| - |\vec{x} - \vec{x}''|)} d\omega \end{aligned}$$

Para un punto alejado de observación que se encuentra a una distancia mucho mayor que las dimensiones de las fuentes, se verificará

$$|\vec{x}| \gg |\vec{x} - \vec{x}'|$$

Entonces se puede aproximar

$$|\vec{x} - \vec{x}'| - |\vec{x} - \vec{x}''| \approx \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot (\vec{x}'' - \vec{x}') + \frac{1}{2|\vec{x}|} (\vec{x}'^2 - \vec{x}''^2)$$

Si además si el rango de las frecuencias que contribuyen con respecto a las dimensiones L de las fuentes verifica la condición

$$\frac{\omega}{c} L \gg 1$$

entonces, la integral oscilará muy rápidamente si $\vec{x}''$ difiere de $\vec{x}'$ y será prácticamente nula, por lo que podemos aproximar en este caso de acuerdo con el método de la fase estacionaria

$$\vec{S}_{CT}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{2(4\pi)^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left| \int_{V_{\infty}} \vec{J}_T(\omega) \wedge \vec{r}_u e^{i\frac{\omega}{c} r} d^3x' \right|^2 \vec{r}_u d\omega$$

Para campo lejano, a distancias grandes comparadas con las dimensiones de las fuentes se puede aproximar

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|} = |\vec{x}| - \vec{x}_u \cdot \vec{x}'$$

$$\vec{r}_u = \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \vec{x}_u + \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{x}_u) \vec{x}_u - \vec{x}'}{|\vec{x}|} = \vec{x}_u - \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}' \wedge \vec{x}_u}{|\vec{x}|}$$

Componentes T,L del espectro Fourier del campo E.M

Ya hemos visto el campo electromagnético obedece en el vacío en presencia de cargas y corrientes obedece a las ecuaciones de ondas inhomogéneas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{J}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{x}, t) = -\mu_0 \vec{J}$$

Los significados del campo electromagnético

Si se hace la transformada de Fourier se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= -\frac{i}{\epsilon_0} \left(\vec{k} \rho(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega}{c^2} \vec{J}(\vec{k}, \omega) \right) \\ \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= i\mu_0 \vec{k} \wedge \vec{J}(\vec{k}, \omega) \\ \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{A}(\vec{k}, \omega) &= \mu_0 \vec{J}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

Si $\vec{E}$ se descompone en sus componentes longitudinales y transversales, se debe verificar entonces

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T(\vec{x}, t) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_T(\vec{k}, \omega) = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_L(\vec{x}, t) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{E}_L(\vec{k}, \omega) = 0 \end{aligned}$$

y para el campo de inducción magnética al ser solenoidal

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) &\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) = 0 \quad \text{y} \quad \vec{B}_L(\vec{k}, \omega) \equiv 0 \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \wedge \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

El caso de una onda que se propaga en el vacío donde no existen fuentes es evidente que deberá ser

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Separando las componentes longitudinales de las transversales, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}_T(\vec{k}, \omega) &= \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{J}_T(\vec{k}, \omega) \\ \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{E}_L(\vec{k}, \omega) &= -\frac{i}{\epsilon_0} \left(\vec{k} \rho(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega}{c^2} \vec{J}_L(\vec{k}, \omega) \right) \\ \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) &= i\mu_0 \vec{k} \wedge \vec{J}_T(\vec{k}, \omega) \\ \left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) &= \mu_0 \vec{J}_T(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

de lo que se deduce

$$\vec{E}_T(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{\vec{k}^2} \vec{k} \wedge \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega}{\vec{k}^2} \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) = i\omega \vec{A}_T(\vec{k}, \omega)$$

por lo que $\vec{E}_T(\vec{k}, \omega)$, $\vec{B}_T(\vec{k}, \omega)$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre sí.

Además

$$\begin{aligned}\vec{B}_T(\vec{k}, \omega) &= i\vec{k} \wedge \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \\ \vec{E}_T(\vec{k}, \omega) &= i\omega \vec{A}_T(\vec{k}, \omega)\end{aligned}$$

La componente promedio del flujo de energía propagante será

$$\begin{aligned}\langle \vec{S}_{CT} \rangle(\vec{k}, \omega) &= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \text{Re}(\vec{E}_T(\vec{k}, \omega) \wedge \vec{B}_T^*(\vec{k}, \omega)) = \frac{\epsilon_0 c^2 \omega}{2} \text{Re}(\vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \wedge \vec{k} \wedge \vec{A}_T^*(\vec{k}, \omega)) \\ &= \frac{\epsilon_0 c^2 \omega}{2} |\vec{A}_T(\vec{k}, \omega)|^2 \vec{k}\end{aligned}$$

Vemos que las componentes Fourier del flujo de energía son proporcionales al módulo al cuadrado de las componentes transversales del potencial vector y que tienen la dirección del vector de onda.

En función de las corrientes tendremos

$$\langle \vec{S}_{CT} \rangle(\vec{k}, \omega) = \frac{\epsilon_0 c^2 \omega}{2} \frac{|\vec{J}_T(\vec{k}, \omega)|^2}{\left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)^2} \vec{k} = \frac{\epsilon_0 c^2 \omega}{2} \frac{|\vec{J}(\vec{k}, \omega) \wedge \vec{k}_u|^2}{\left(\vec{k}^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)^2} |\vec{k}| \vec{k}_u$$

Para una onda que se propaga en el vacío donde no hay fuentes es $|\vec{k}| = \omega/c$, por lo que será

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(\vec{k}, \omega) &= \frac{c}{|\vec{k}|} \vec{k} \wedge \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) = \frac{ic}{|\vec{k}|} \vec{k} \wedge \vec{k} \wedge \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) = ic|\vec{k}| \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \\ \langle \vec{S}_{CT} \rangle(\vec{k}, \omega) &= \frac{\epsilon_0 c^3}{2} |\vec{k}|^2 |\vec{A}_T(\vec{k}, \omega)|^2 \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\epsilon_0 c^3}{2} |\vec{k}|^2 |\vec{A}_T(\vec{k}, \omega)|^2 \vec{k}_u = c \langle w_c \rangle(\vec{k}, \omega) \vec{k}_u\end{aligned}$$

Las componentes Fourier del flujo de energía $\vec{P}_{CT}(\vec{k}, \omega)$ se comporta como si transportasen unas componentes Fourier de densidad de energía $w_c(\vec{k}, \omega)$ en la dirección del vector de onda $\vec{k}_u$ con la velocidad de la luz c

$$\langle w_c \rangle(\vec{k}, \omega) = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} |\vec{k}|^2 |\vec{A}_T(\vec{k}, \omega)|^2$$

El campo longitudinal se obtiene a partir de la ecuación

$$\nabla^2 \phi_L = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi_L(\vec{k}, \omega) = \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{\epsilon_0 \vec{k}^2}$$

que nos da

$$\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi_L \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_L(\vec{k}, \omega) = -i \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{\epsilon_0 k^2} \vec{k}$$

A partir de estas expresiones se pueden calcular las componentes del momento lineal y angular, sin embargo, los cálculos se simplifican notablemente si se hacen en función del potencial vector.

Hemos visto que los potenciales del campo electromagnético para verificar las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}_T &= -\mu_0 \vec{J}_T \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \right) \vec{A}_L - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J}_L \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Su transformada Fourier será entonces

$$\begin{aligned} \left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) &= \mu_0 \vec{J}_T(\vec{k}, \omega) \\ \left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) - \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega}{c^2} \phi(\vec{k}, \omega) \right) &= \mu_0 \vec{J}_L(\vec{k}, \omega) \\ \vec{k}^2 \phi(\vec{k}, \omega) - \omega \vec{k} \cdot \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) &= \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Con lo que el campo electromagnético en función de los potenciales viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(\vec{k}, \omega) &= i\omega \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \\ \vec{E}_L(\vec{k}, \omega) &= i\omega \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) - i\rho(\vec{k}, \omega) \vec{k} \\ \vec{B}_T(\vec{k}, \omega) &= i\vec{k} \wedge \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

Las condiciones para los gauges de Lorentz y de Coulomb toman la expresión

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) - \frac{\omega}{c^2} \phi(\vec{k}, \omega) &= 0 && \text{gauge de Lorentz} \\ \vec{A}_L(\vec{k}, \omega) &\equiv 0 && \text{gauge de Coulomb} \end{aligned}$$

Vemos que utilizando los gauges la solución de las ecuaciones se simplifica notablemente al poderse eliminar el término en $\vec{k} \cdot \vec{A}_L(\vec{k}, \omega)$.

Para el gauge de Lorentz obtenemos

$$\vec{A}_T(\vec{k}, \omega) = \mu_0 \frac{\vec{J}_T(\vec{k}, \omega)}{\left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}$$

$$\vec{A}_L(\vec{k}, \omega) = \mu_0 \frac{\vec{J}_L(\vec{k}, \omega)}{\left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}$$

$$\phi(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{\left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}$$

Y para el gauge de Coulomb

$$\vec{A}_T(\vec{k}, \omega) = \mu_0 \frac{\vec{J}_T(\vec{k}, \omega)}{\left(\vec{k}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}$$

$$\vec{A}_L(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\phi(\vec{k}, \omega) = \phi_L(\vec{k}, \omega) = \frac{\rho(\vec{k}, \omega)}{\epsilon_0 \vec{k}^2} \quad \mu_0 \vec{J}_L(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{c^2} \phi_L(\vec{k}, \omega)$$

Es de interés el caso de una partícula que se mueve con velocidad constante $\vec{v}$, siendo entonces

$$\rho(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{v}t) \Rightarrow \rho(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{v}t) \Rightarrow \rho(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{v}$$

que nos llevan a los potenciales de Liénard-Wiechert que estudiaremos en detalle con las teorías de la causalidad.

A partir de las componentes de Fourier de los potenciales se obtiene fácilmente el momento lineal y angular del campo electromagnético.

El momento lineal transversal total del campo electromagnético, como hemos visto en el capítulo de teorías vectoriales, viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{P}_{CT}^i(t) &= \epsilon_0 \int_{V_\infty} \vec{E}_T(\vec{x}, t) \wedge \vec{B}_T(\vec{x}, t) d^3x = -\epsilon_0 \int_{V_\infty} \partial_t \vec{A}_T^j(\vec{x}, t) \partial_i \vec{A}_T^j(\vec{x}, t) d^3x \\ &= -\frac{\epsilon_0}{(2\pi)^4} \int_{R_\infty} \omega k^i \vec{A}_T^j(\vec{k}, \omega) \vec{A}_T^j(\vec{k}', \omega') e^{i(\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{k}') - t(\omega + \omega'))} d^3x d^3k d^3k' d\omega d\omega' \\ &= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{R_\infty} \omega k^i \vec{A}_T^j(\vec{k}, \omega) \vec{A}_T^j(-\vec{k}, \omega') e^{-it(\omega + \omega')} d^3k d\omega d\omega' \end{aligned}$$

El momento angular de espín será

$$\begin{aligned}\vec{S}_{spin}(t) &= \varepsilon_0 \int_{V_\infty} \vec{E}_T(\vec{x}, t) \wedge \vec{A}_T(\vec{x}, t) d^3x = -\varepsilon_0 \int_{V_\infty} \partial_t \vec{A}_T(\vec{x}, t) \wedge \vec{A}_T(\vec{x}, t) d^3x = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^4} \int_{R_\infty} i\omega \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \wedge \vec{A}_T(\vec{k}', \omega') e^{i(\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{k}') - t(\omega + \omega'))} d^3x d^3k d^3k' d\omega d\omega' \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{R_\infty} i\omega k^i \vec{A}_T(\vec{k}, \omega) \wedge \vec{A}_T(-\vec{k}, \omega') e^{-it(\omega + \omega')} d^3k d\omega d\omega'\end{aligned}$$

Desarrollo en multipolos. Representación armónica

Como vimos, es posible elegir otros espacios de representación si tenemos un conjunto cerrado y completo de funciones base normalizadas $|\varphi_k\rangle$. Otro espacio muy utilizado es de las funciones armónicas $|lm\rangle$, que cuando se proyectan en el espacio de las coordenadas esféricas angulares se denomina como polinomios esférico armónicos $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | lm \rangle$$

Las funciones armónicas, se pueden considerar como el desarrollo de la función de Green G_0 para $\vec{x} > \vec{x}'$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{|\vec{x}'|^l}{|\vec{x}|^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \alpha) \frac{|\vec{x}'|^l}{|\vec{x}|^{l+1}}$$

donde (θ', φ') y (θ, φ) son las coordenadas angulares esféricas de $\vec{x}'$ y $\vec{x}$ respectivamente, y α es el ángulo que forman ambos vectores. Siendo además

$$P_l(\cos \theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l0}(\theta, \varphi)$$

Los polinomios $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ cumplen las relaciones de ortogonalidad y completitud

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi}$$

La delta de Dirac ante una transformación de coordenadas se transforma de acuerdo con el jacobiano de la transformación

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \right|} \delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}')$$

Por ellos será

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \delta(|\vec{x}| - |\vec{x}'|) \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

Otras representaciones de la Delta de Dirac útiles son

$$\delta(\theta - \theta') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta - \theta')}$$

Esto permite desarrollar cualquier función $f(\theta, \varphi)$ en polinomios armónicos

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{lm} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{con} \quad f_{lm} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \delta\theta \delta\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

Los polinomios armónicos se pueden escribir explícitamente como

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

donde P_l^m viene dado por la fórmula recursiva

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$$

Evidentemente será

$$P_l(\cos \theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l0}(\theta, \varphi)$$

Las funciones armónicas definen un espacio de representación alternativo. Una relación muy útil es el desarrollo de la función de Green G_1 en polinomios armónicos

$$\frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = ik \sum_{l=0}^{\infty} j_l(k|\vec{x}'|) h_l^{(1)}(k|\vec{x}|) \frac{2l+1}{4} P_l(\cos \alpha) \quad \text{y} \quad |\vec{x}| > |\vec{x}'|$$

donde j_l y $h_l^{(1)}$ son las funciones de Bessel y de Hankel, que tiene la propiedad de normalización

$$\int_0^\infty j_l(kx) j_l(k'x) x dx = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

La representación en polinomios armónicos permite aproximar los potenciales en un desarrollo en potencias de $1/r$. El potencial de Coulomb estacionario

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos \alpha)}{|\vec{x}|^{l+1}} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') |\vec{x}'|^l d^3x'$$

Si consideramos los tres primeros términos $l = 0, 1, 2$, tendremos el desarrollo en multipolos

$$4\pi\epsilon_0\phi(\vec{x}) = \frac{Q_e}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}_e}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x^i x^j}{|\vec{x}|^5} Q_{ij} + \dots$$

donde Q_e es la carga eléctrica total, $\vec{p}_e$ es el momento dipolar eléctrico, y Q_{ij} es la matriz del momento cuadrupolar eléctrico, ya que

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') d^3x' = Q_e$$

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') |\vec{x}'|^1 P_1(\cos \alpha) d^3x' = \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \vec{x} d^3x' = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') \vec{x}' d^3x' = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{p}_e$$

$$\begin{aligned} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') |\vec{x}'|^2 P_2(\cos \alpha) d^3x' &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') |\vec{x}'|^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) d^3x' \\ &= \frac{1}{2|\vec{x}|^2} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}') (3(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2 - |\vec{x}|^2 |\vec{x}'|^2) d^3x' = \frac{1}{2|\vec{x}|^2} \sum_{i,j} x^i x^j Q_{ij} \end{aligned}$$

Para el potencial vector se puede proceder de igual forma. Sin embargo tiene especial interés partir de la transformada Fourier en frecuencias, ya que como vimos viene determinada por la función de Green retardada $G_{1r}(\vec{x}, \omega)$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, \omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\omega}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4} j_l(k|\vec{x}'|) h_l^{(1)}(k|\vec{x}|) \int_{V_\infty} \vec{J}(\vec{x}', \omega) P_l(\cos \alpha) d^3x' \end{aligned}$$

Una forma más simple de obtener los primeros términos, es utilizar la aproximación de campo lejano, que como vimos consiste en aproximar

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \vec{x}' \cdot \hat{\vec{x}}$$

y por tanto desarrollar el factor que multiplica en la integral a la corriente en potencias de $1/|\vec{x}|$

$$4\pi G_{1r}(\vec{x}, \omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(|\vec{x}|-\vec{x}_u \cdot \vec{x}')}}{|\vec{x}| - \vec{x}_u \cdot \vec{x}'} \\ \approx \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \left(1 + \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{i\omega}{c} \right) \vec{x}_u \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{|\vec{x}|^2} - \frac{2i\omega}{c|\vec{x}|} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) (\vec{x}_u \cdot \vec{x}')^2 \right)$$

El primer término nos da la aproximación dipolar

$$\vec{A}(\vec{x}, \omega) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \int_{V_\infty} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d^3x'$$

donde la integral de corriente está relacionado con el momento dipolar eléctrico

$$\int_{V_\infty} J^i(\vec{x}', \omega) d^3x' = \int_{V_\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x'^j} (x'^i J^j(\vec{x}', \omega)) - x'^i \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}', \omega) \right) d^3x' \\ = - \int_{V_\infty} i\omega x'^i \rho(\vec{x}', \omega) d^3x' = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}_e(t) e^{-i\omega t} dt$$

considerando la ecuación de conservación de la carga $\vec{J}(\vec{x}, \omega) = i\omega\rho(\vec{x}, \omega)$, y que la corrientes ocupan una región finita en el espacio.

Estas ecuaciones serán analizadas con más detalle en los capítulos de teorías de sistema móviles y de la causalidad.

Desarrollo espectral de las funciones de Green

En general, para una ecuación real del tipo

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_r^2}{c^2} \right) \varphi_r(\vec{x}) = 0$$

las soluciones $\varphi_r(\vec{x})$ forman un conjunto completo ortonormal completo para un espectro de los valores propios $k_r = \sqrt{\omega^2/c^2}$, que puede ser discreto o continuo dependiente de las condiciones de contorno

$$\int_V \varphi_r^*(\vec{x}) \varphi_r(\vec{x}) d^3x = \delta_{rr'} \quad \text{o} \quad \int_V \varphi_k^*(\vec{x}) \varphi_k(\vec{x}) d^3x = \delta(k - k')$$

$$\sum_r \varphi_r^*(\vec{x}') \varphi_r(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^*(\vec{x}') \varphi_k(\vec{x}) dk = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Si queremos resolver la ecuación no homogénea

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

esto se puede hacer si determinamos función de Green $G_1(\vec{x} - \vec{x}')$ que es solución de la ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)G_1(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

ya que la solución vendrá dada por

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') d^3x'$$

Es fácil comprobar que la función de Green $G_1(\vec{x} - \vec{x}')$ viene determinada por el desarrollo en las funciones propias

$$G_1(\vec{x} - \vec{x}') = \sum_r \frac{\varphi_r^*(\vec{x}') \varphi_r(\vec{x})}{k^2 - (\omega_r/c)^2} \quad \text{o} \quad G_1(\vec{x} - \vec{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_k^*(\vec{x}') \varphi_k(\vec{x})}{k^2 - (\omega_k/c)^2} dk$$